Unidad V

Aplicaciones de la derivada

5.1 Recta tangente y recta normal a una curva en un punto. Curvas ortogonales.

Una tangente a una curva es una recta que toca la curva en un solo punto y tiene la misma pendiente que la curva en ese punto. Una normal a una curva es una recta que es perpendicular a la tangente de la curva. La tangente y la normal en un mismo punto en cualquier superficie siempre son perpendiculares entre sí.

Diferentes soluciones se pueden utilizar para encontrar la ecuación de la tangente de cualquier curva y = g(x) en los puntos x1, y1. La pendiente de la tangente a la curva y = g(x) en los puntos x1, y1 está dada por g‘(x1),es decir, el valor de la primera derivada de la función en x1, y1.

La ecuación requerida para esta tangente se puede encontrar en la ecuación de la recta y-y1 = m (x - x1).

Así, la ecuación de la tangente en x1, y1 se puede dar como y - y1 = g (x1) (x - x1).

Ahora bien, dado que respecto ala normalla tangente es perpendicular , su pendiente es el recíproco negativo de la pendiente de la tangente así como la pendiente de dos rectas perpendiculares son recíprocas negativas una dela otra.

Por tanto, la pendiente de la normal a la curva y = g(x) en los puntos x1, y1 es −1/g’(x1), donde g’(x1) ≠ 0.

Por lo tanto, la ecuación de la normal a la curva es dada como y – y1 = - (1/g’(x1)) (x – x1).

Si una recta tangente a la curva y = g(x) forma un ángulo Ɵ con el eje x en una dirección positiva, entonces la pendiente de la tangentes es igual a tan Ɵ.

Por tanto, la ecuación de la tangente puede ser escrita también como y – y1 = tan Ɵ (x – x1).

El concepto de tangente y normal contiene dos casos especiales:

1). Si la pendiente de la recta tangente es 0, entonces la recta tangente es paralela al eje x.

En tales casos, la ecuación de la tangente en el punto x_1, y_1 es $y = y_1$.

2). Si la tangente es perpendicular al eje x, entonces en ese caso, la pendiente tiende al infinito y la recta tangente es paralela al eje y.

La ecuación se convierte entonces en $x = x_1$.

Otro término importante asociado con el concepto de curva es el de las curvas ortogonales.

Cuando dos o más curvas se intersectan perpendicularmente entre sí, entonces se les conoce como curvas ortogonales.

Las tangentes de las curvas ortogonales son perpendiculares entre sí.

Además, el producto de sus pendientes es −1.

Estas propiedades pueden ser muy útiles para la determinación de curvas ortogonales.

Por ejemplo: Supongamos la recta $y = (1 + \sqrt{2})\, x$ y la recta $y = (1 - \sqrt{2})\, x$

Encuentre la pendiente de $y = (1 + \sqrt{2})x$, obtenemos

$dy/dx = d((1 + \sqrt{2})x) / dx$

$= 1 + \sqrt{2}$

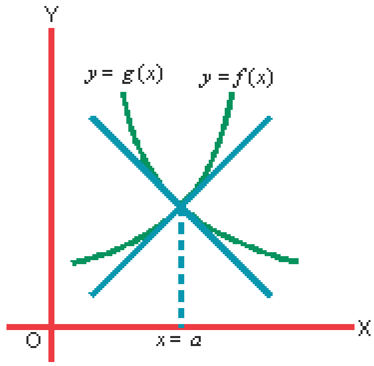
Del mismo modo, para la recta $y = (1 - \sqrt{2})x$, la pendiente resulta ser $1 - \sqrt{2}$

Multiplicando la pendiente de estas dos rectas, obtenemos

$m_1.m_2 = (1 + \sqrt{2}).\ (1 - \sqrt{2})$

$m_1.m_2 = -1$

Por tanto, estas dos rectas se dice que son ortogonales, es decir, se intersectan entre sí en ángulo de 90 °.



5.2 Teorema de Rolle, teorema de Lagrange o teorema del valor medio del cálculo diferencial.

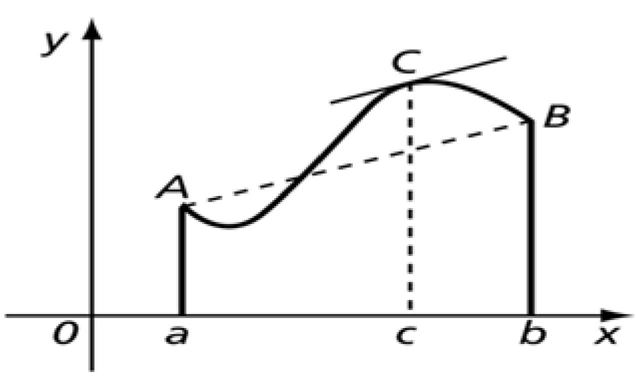
Según este teorema, si f es una función continua en el intervalo cerrado [a, b] y diferenciable en el intervalo abierto (a, b), entonces existe un punto en el intervalo abierto (a, b) tal que la pendiente de la tangente en ese punto es igual a

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

De acuerdo con la definición geométrica, si f es continua en [a, b] y diferenciable en (a, b), la pendiente de la recta que une (a, f(a)) y (b, f(b)) es $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. y f'(c) es la pendiente de la tangente (c, f(c)) para la gráfica de y = f(x).

Entonces el teorema de valor medio dice que si la curva es continua y = f(x) tiene una tangente en cada punto (x, f(x)) para a<x<b, entonces para algún punto (c, f©), donde a<c<b, la tangente a la curva es paralela a la línea que une los puntos (a, f(a)) y (b, f(b)) en la curva.

En este caso, siempre podemos encontrar el punto c \ en (a, b) tal que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$ = f'(c).



Al relacionar el teorema del valor medio con el concepto de movimiento, se puede ir profundamente.

Supongamos que una motocicleta hace un viaje a una velocidad de 50 km en una hora.

Por lo tanto, su razón promedio en ese instante es 50km/h.

A fin de mantener una velocidad constante de 50km/h, la motocicleta tiene que viajar a 50 km / h durante todo el tiempo completo o, en caso de que la motocicleta frene en ciertos momentos, entonces debe llenar este vacío acelerando en algunos momentos para mantener la razón de 50km/h durante todo el viaje.

Aquí el Teorema del valor medio puede afirmar que durante todo el recorrido, puede haber llegado un punto donde la velocidad real de la motocicleta, coincide con la velocidad media, es decir 50 km / h.

Este teorema, conocido también como el Teorema de Lagrange, tiene una importancia extrema en el cálculo y puede ser útil para la solución de numerosos problemas.

5.3 Función creciente y decreciente. Máximos y mínimos de una función. Criterio de la primera derivada para máximos y mínimos. Concavidades y puntos de inflexión. Criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos.

Máximos y mínimos de una función

Criterios de la derivada de primer orden para máximos y mínimos

Concavidades y puntos de inflexión

Criterios de la derivada de segundo orden para máximos y mínimos

Hay ciertas características, o establecidos simplemente como términos, que pueden ser encontrados en las derivadas.

Estos son considerados como las aplicaciones de las derivadas.

Algunas de ellas incluyen:

Función creciente y función decreciente

Máximos y mínimos de una función

Criterios de la derivada de primer orden para máximos y mínimos

Concavidades y puntos de inflexión

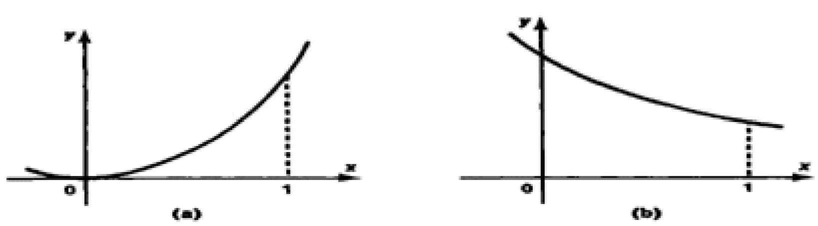
Criterios de la derivada de segundo orden para máximos y mínimos

Función creciente y función decreciente: Una de las principales aplicaciones de las derivadas es determinar si la función f está creciendo o decreciendo en un intervalo determinado.

Esto puede encontrarse mediante tomar una único derivada de la función.

Si resulta ser mayor que 0 en cada punto del intervalo dado, entonces es una función creciente.

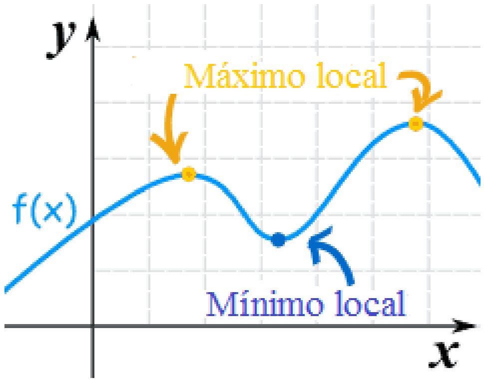
Por otro lado, si resulta inferior a 0 entonces la función será una función decreciente.



Máximos y mínimos de una función:

Se dice que una función tiene un valor máximo en el punto v, cuando el valor de f(v) es mayor que el valor en cualquiera de los puntos vecinos.

Del mismo modo, cuando el valor es menor que el valor en sus puntos vecinos, entonces ese valor se convierte en el valor mínimo de la función.



Criterios de la derivada de primer orden para máximos y mínimos:

Los relativos máximos o mínimos de la función pueden ser encontrados mediante la búsqueda de la primera derivada de la función.

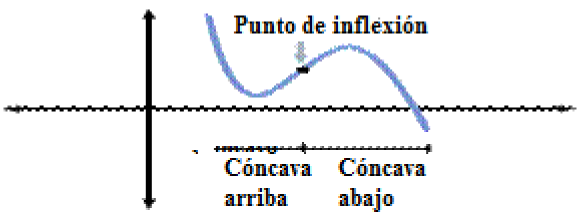
Si la primera derivada resulta ser mayor que 1, en ese caso, se dice que la función está creciendo sobre el intervalo.

En el caso inverso, cuando la primera derivada resulta ser menor que 1, entonces se dice la que función es decreciente en ese intervalo.

Concavidades y puntos de inflexión:

El concepto de concavidad se utiliza para determinar si la gráfica de la función es de la forma cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

Si para los valores dados de intervalo, la doble derivada de la función es mayor o igual que 0, entonces el gráfico de la función será cóncavo hacia arriba, y cuando la doble derivada se convierte en menor que 0, entonces la forma de la gráfica será cóncava hacia abajo.



Ahí se encuentra una posición en la cual el gráfico de la función cambia su forma de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba o vice-versa.

Estas posiciones, o más bien los puntos, son conocidos como puntos de inflexión.

En estos puntos de inflexión, la doble derivada de la función se convierte en 0.

Criterios de la derivada de segundo orden para máximos y mínimos:

La segunda derivada también puede ser utilizada con el fin de encontrar el punto máximo o mínimo de la función.

1). Se dice que una función posee el máximo local en un punto específico, si, la doble derivada de la función en ese punto es menor que 0.

2). Se dice que una función posee mínimo local en un punto específico, si, la doble derivada de la función en ese punto es mayor que 0.

3). Cuando la doble derivada resulta ser 0, en ese caso, es posible que el punto sea un punto de inflexión.

Criterios de la derivada de primer orden para máximos y mínimos:

Los relativos máximos o mínimos de la función pueden ser encontrados mediante la búsqueda de la primera derivada de la función.

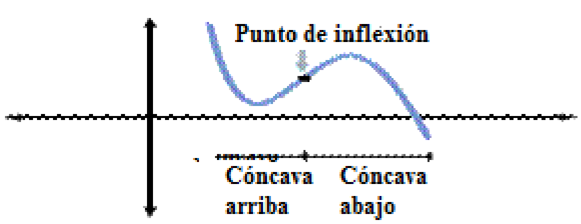
Si la primera derivada resulta ser mayor que 1, en ese caso, se dice que la función está creciendo sobre el intervalo.

En el caso inverso, cuando la primera derivada resulta ser menor que 1, entonces se dice la que función es decreciente en ese intervalo.

Concavidades y puntos de inflexión:

El concepto de concavidad se utiliza para determinar si la gráfica de la función es de la forma cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

Si para los valores dados de intervalo, la doble derivada de la función es mayor o igual que 0, entonces el gráfico de la función será cóncavo hacia arriba, y cuando la doble derivada se convierte en menor que 0, entonces la forma de la gráfica será cóncava hacia abajo.



Ahí se encuentra una posición en la cual el gráfico de la función cambia su forma de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba o vice-versa.

Estas posiciones, o más bien los puntos, son conocidos como puntos de inflexión.

En estos puntos de inflexión, la doble derivada de la función se convierte en 0.

Criterios de la derivada de segundo orden para máximos y mínimos:

La segunda derivada también puede ser utilizada con el fin de encontrar el punto máximo o mínimo de la función.

1). Se dice que una función posee el máximo local en un punto específico, si, la doble derivada de la función en ese punto es menor que 0.

2). Se dice que una función posee mínimo local en un punto específico, si, la doble derivada de la función en ese punto es mayor que 0.

3). Cuando la doble derivada resulta ser 0, en ese caso, es posible que el punto sea un punto de inflexión.

5.4 Análisis de la variación de funciones

En función de variación acotada, también conocido como BV función, es un numero real con valores de función cuya variación total está limitado (finito): la gráfica de una función con esta propiedad se comporta bien en un sentido preciso.

Para una función continua de una sola variable, por ser de variación acotada significa que la distancia a lo largo de la dirección de la yEjes, dejando de lado la contribución del movimiento a lo largo de x Ejes, que recorre un punto movimiento a lo largo de la gráfica tiene un valor finito.

Para una función continua de varias variables, el significado de la definición es la misma, excepto por el hecho de que la trayectoria continua que se considera que no puede ser todo el gráfico de la función dada (que es un hipersuperficie en este caso), pero puede ser cada intersección de la propia gráfica con un hiperplano (en el caso de funciones de dos variables, una plano) paralelo a un fijo xEjes y al y Ejes

5.5 Cálculo de aproximaciones usando la diferencial.

Se define en esta sección el concepto de la diferencial, que nos permite representar la derivada como un cociente y hallar el valor aproximado de la variación de una función alrededor de un punto.

La definición esta motivada por el siguiente razonamiento geométrico. Sea P(x0, y0) un punto fijo sobre la gráfica de y = f (x) Tomando el punto P(x0, y0) como origen, se introduce un nuevo sistema de coordenadas cuyos ejes dx y dyson paralelos a los ejes antiguos.

En este nuevo sistema de coordenadas, la recta tangente en el punto P pasa por el origen y en consecuencia, su ecuaci¨®n es bastante simple, a saber: dy = mdx, donde m es la pendiente. Ahora, como la pendiente en el nuevo sistema es la misma que la del antiguo, esto es m = f ¡¯(x), se tiene entonces: dy = f ¡¯(x) dx Lo anterior nos permite dar la definición formal de las diferencial.

5.6 Problemas de optimización y de tasas relacionadas.

La optimización se refiere al tipo de problema que se ocupa de la determinación de la forma más apropiada para realizar cierta tarea. Con el fin de resolver estos problemas, se calculan los valores mínimos y máximos de la función. Estos incluyen encontrar la distancia mínima para llegar a un punto, el costo mínimo para hacer determinada operación, etc. La función cuyo máximo o mínimo necesita determinase por lo general está sujeta a ciertas restricciones que deben tomarse en cuenta.

Estos problemas son diferentes a los problemas utilizados para encontrar los valores mínimos o máximos locales. Los Problemas de optimización sólo se ocupan de los valores máximos o mínimos que una función puede tomar y no del mínimo o máximo en un intervalo. Es decir, la optimización busca el mínimo o máximo global (absoluto) y no el local. El mínimo o máximo absoluto es el mayor entre el mínimo o máximo local, respectivamente.

Puede haber casos, donde el mínimo o máximo global no existe para una función. En estos el dibujo de la gráfica para la función correspondiente puede ayudar en gran manera.

Hay algunos pasos que deben seguirse con el fin de desglosar un problema de optimización:

1). Lo primero y más importante es identificar las variables y constantes de la función. Esto ayuda a determinar la parte de la función que será minimizada o maximizada.

2). Escribir la fórmula adecuada para la función particular, para lo cual tenemos que calcular el mínimo o máximo.

3). Ahora, la fórmula será escrita en términos de una sola variable, es decir, f®.

4). Establezca la diferenciación de f® a 0, f ‘® = 0, y resuelva a través de observar todas las limitaciones y otros valores críticos para encontrar los valores extremos.

Por ejemplo, considere la función, g ® = -r2 + 4r – 2. Y siendo el intervalo en el cual el valor máximo será encontrado [0, 1]. Calculando g ‘® se obtiene,

g’ ® = −2r + 4 = 0

Por lo tanto, 2 viene a ser un valor crítico, luego reemplazando el 2 en la función g (2) = 2. Ahora sustituyendo uno por uno los valores del intervalo en el lugar de r, obtenemos,

g (0) = −2 g (1) = 1

Se puede observar, que el valor máximo de g® en [0, 1] es 2.

Un tipo parecido de problema es el problema de las tasas relacionadas. Se trata de un problema en el que se proporciona la tasa de variación de al menos una variable de la función y en el problema se necesita buscar la otra tasa de variación.

También hay ciertas reglas simples para resolver estos problemas:

Considere que f(a) sea una función con dos variables a y b, las cuales cambian con el tiempo y la tasa de variación de a es dada con el tiempo, es decir, $\frac{da}{dt}$.

1). En primer lugar, encontrar la derivada de f(a), es decir, f ‘(a)

2). Ponga el valor de a en la ecuación

3).Entonces multiplíquelo con $\frac{da}{dt}$ para obtener $\frac{db}{dt}$

Aplicar las reglas en un ejemplo proporcionará una mejor comprensión:

Suponga que la pregunta dada dice lo siguiente: Se está bombeando aire a un globo esférico de 4 cm de radio a 5 cm3 / seg. Entonces, el ritmo de cambio del radio del globo necesita ser calculado.

Se puede observar que el radio y el volumen son las variables de las funciones correspondientes. $\frac{dv}{dt}$ es dada y es igual a 5 cm3/seg y necesita encontrarse. Como $\frac{dr}{dt}$ V= 4 r3 / 3. Diferenciando ambos lados, se obtiene Π . Ahora sustituyendo el valor de en esta ecuación, se obtiene $\frac{dr}{dt} = \frac{7}{64\Pi}$